


МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЛГПУ»)

Институт физико-математического образования, информационных и
обслуживающих технологий
Кафедра фундаментальной математики

УТВЕРЖДАЮ

Врио директора Института физико-
математического образования,
информационных и обслуживающих
технологий


Е.А. Журавлева
«25» февраль 2026

Приложение к рабочей программе учебной дисциплины

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации
обучающихся по дисциплине

Обобщенные функции и их приложения к теории уравнений в частных
производных

По направлению подготовки 01.04.01 Математика

Магистерская программа –

Квалификация выпускника магистр

Форма обучения очная

Курс 2 курс

Разработчики:

доцент Скринникова А.В.


заведующий кафедрой

фундаментальной математики

Темникова С.В.

Заведующий кафедрой

фундаментальной математики

 Темникова С.В.

Протокол

от «17» декабрь 2025 г., № 6

Луганск, 2026

1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

1.1. Область применения

Фонд оценочных средств (ФОС) – неотъемлемая часть рабочей программы дисциплины (модуля) «Обобщенные функции и их приложения к теории уравнений в частных производных» и предназначен для контроля и оценки образовательных достижений студентов, освоивших программу дисциплины (модуля).

1.2. Цели и задачи фонда оценочных средств

Цель ФОС – установить соответствие уровня подготовки обучающегося требованиям ФГОС ВО магистратура по направлению подготовки 01.04.01 Математика, утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 г. № 12 (с изменениями и дополнениями).

1.3. Перечень компетенций, формируемых в процессе освоения основной образовательной программы

Процесс освоения дисциплины направлен на овладение следующими компетенциями:

Код по ФГОС ВО	Индикатор достижения
Профессиональные	
ПК-3 – Способен осуществлять педагогическую деятельность по реализации программ основного и среднего общего образования в рамках модуля «Предметное обучение. Математика».	ПК-3.1. Демонстрирует фундаментальные знания математической теории и перспективных направлений развития современной математики, необходимые для осуществления педагогической деятельности.
	ПК-3.2. Демонстрирует убеждение в абсолютности математической истины, математического доказательства и умение осуществлять выбор рациональных методов решения поставленной задачи.

1.4. Этапы формирования компетенций и средства оценивания уровня их сформированности

Этапы формирования компетенций	Компетенции	Контрольно-оценочные средства / способ оценивания
Тема 1. Обобщенные функции и действия над ними. Фундаментальные решения дифференциальных уравнений.	ПК-3	<ul style="list-style-type: none">• выполнение и защита лабораторных работ;• выполнение практических заданий;• реферат.
Тема 2. Преобразования Фурье (основных функций; умеренных обобщенных функций; быстрорастущих обобщенных функций).	ПК-3	<ul style="list-style-type: none">• выполнение и защита лабораторных работ;• выполнение практических заданий;• реферат.

Тема 3. Теория Пэли-Винера. Свертка и преобразование Фурье.	ПК-3	<ul style="list-style-type: none"> • выполнение и защита лабораторных работ; • выполнение практических заданий; • реферат.
Тема 4. Проблема деления. Регуляризация. Методы вычитаний, выхода в комплексную область, метод степеней Рисса.	ПК-3	<ul style="list-style-type: none"> • выполнение и защита лабораторных работ; • реферат.
Тема 5. Уравнения в выпуклом конусе. Операционное исчисление. Распространение особенностей и гладкость решений.	ПК-3	<ul style="list-style-type: none"> • выполнение и защита лабораторных работ; • реферат.
Тема 6. Методы построения фундаментальных решений.	ПК-3	<ul style="list-style-type: none"> • выполнение и защита лабораторных работ; • реферат.
Тема 7. Уравнения с постоянными коэффициентами в полупространстве. Краевые задачи.	ПК-3	<ul style="list-style-type: none"> • выполнение и защита лабораторных работ; • реферат.
Промежуточная аттестация	ПК-3	экзамен

1.5. Описание показателей формирования компетенций

Код и наименование компетенции	Показатели достижения компетенций (знать, уметь, владеть)
ПК-3 – Способен осуществлять педагогическую деятельность по реализации программ основного и среднего общего образования в рамках модуля «Предметное обучение. Математика».	<p>знать: основные понятия теории уравнений в частных производных; основные понятия и теоремы теории обобщенных функций и их приложения к теории уравнений в частных производных;</p> <p>уметь: применять знания теории обобщенных функций и их приложений к теории уравнений в частных производных в педагогической деятельности;</p> <p>владеть навыками решения классических задач теории уравнений в частных производных, необходимыми для осуществления педагогической деятельности.</p>

1.6. Критерии оценивания компетенций на разных этапах их формирования

Система оценивания учебных достижений студентов

очной формы обучения

Вид текущей учебной работы	Количество баллов
3 семестр	
Выполнение и защита лабораторных работ	20
Выполнение практических заданий	20
Реферат	10
Экзамен (письменный)	50
Итого:	100

Накопительная система оценивания по 100-балльной шкале

Четырехбалльная система оценивания экзамена	100-балльная шкала	Буквенная шкала, соответствующая 100-балльной шкале	Система оценивания зачета
Отлично	90–100	А – отлично – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимальному	Зачтено
Хорошо	83–89	В – очень хорошо – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество выполнения большинства из них оценено числом баллов, близким к максимальному	
Хорошо	75–82	С – хорошо – теоретическое содержание курса освоено полностью; некоторые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы недостаточно; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество выполнения ни одного из них не оценено минимальным числом баллов, некоторые виды заданий выполнены с ошибками	
Удовлетворительно	63–74	Д – удовлетворительно – теоретическое содержание дисциплины освоено частично, но пробелы не носят существенного характера; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы; большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий, содержат ошибки	
Удовлетворительно	50–62	Е – посредственно – теоретическое содержание курса освоено частично;	

		некоторые практические навыки работы не сформированы, многие предусмотренные программой обучения учебные задания не выполнены либо качество выполнения некоторых из них оценено числом баллов, близким к минимальному	
Неудовлетворительно	21–49	FX – неудовлетворительно – теоретическое содержание курса освоено частично; необходимые практические навыки работы не сформированы; большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий не выполнено либо качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимальному; при дополнительной самостоятельной работе над материалом курса возможно повышение качества выполнения учебных заданий	Не зачтено
Неудовлетворительно	0–20	F – неудовлетворительно – теоретическое содержание курса не освоено; необходимые практические навыки работы не сформированы; все выполненные учебные задания содержат грубые ошибки, дополнительная самостоятельная работа над материалом курса не приведет к какому-либо значимому повышению качества выполнения учебных заданий	

1.7. Образец оформления экзаменационного билета

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЛГПУ»)

2025/2026 учебный год

ИНСТИТУТ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ,
ИНФОРМАЦИОННЫХ И ОБСЛУЖИВАЮЩИХ ТЕХНОЛОГИЙ

КАФЕДРА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

экзамен (письменный) по дисциплине
«Обобщенные функции и их приложения к теории уравнений в частных
производных»

Код/названия направлений подготовки **01.04.01 Математика**
ОФО
3 семестр

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 0

1. Преобразование Фурье финитных функций. Замыкание преобразования Фурье по непрерывности.
2. Инвариантные фундаментальные решения уравнений второго порядка с вещественными коэффициентами.
3. Найдите фундаментальные решения обыкновенного дифференциального оператора: $L = \frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2$.
4. Найдите все производные функции $f(x) = H(x) \sin x$.

Утверждено на заседании кафедры фундаментальной математика, протокол
№ от 2025 года.

Заведующий кафедрой
фундаментальной математики

_____ С.В. Темникова

Экзаменатор

_____ С.В. Темникова

2. КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА

2.1. Оценочные средства текущего контроля (типовые)

Примерные практические задания:

1. Докажите, что δ -функция является непрерывным линейным функционалом на пространстве основных функций.

2. Докажите, что для всякой основной функции φ справедливо равенство

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx.$$

3. Докажите следующие предельные соотношения в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

а) $\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}} \rightarrow \delta(x)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. б) $\frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \rightarrow \pm \delta(x)$ при $\varepsilon \rightarrow \pm 0$.

4. Докажите, что функция $f_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, заданная формулой

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & \text{если } |x| \leq \varepsilon, \\ 0, & \text{если } |x| > \varepsilon, \end{cases}$$

стремится в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ к δ -функции при $\varepsilon \rightarrow +0$.

5. Найдите пределы в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ последовательностей функций $f_1, f_2, \dots, f_k, \dots$ и $F_1, F_2, \dots, F_k, \dots$, если

$$f_k(x) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 x^2} \quad \text{и} \quad F_k(x) = \int_{-\infty}^x f_k(x) dx.$$

6. Докажите, что

$$\mathcal{P} \cos \frac{kx}{x} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \text{ где } \left(\mathcal{P} \cos \frac{kx}{x}, \varphi \right) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \frac{kx}{x} \varphi(x) dx.$$

7. Пусть $n > 1$. Докажите, что функция $f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, заданная формулой

$$f_\varepsilon(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{k}{(2\sqrt{\pi\varepsilon})^n} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{4\varepsilon}},$$

стремится в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ к δ -функции при $\varepsilon \rightarrow +0$.

8. Тракутя несобственный интеграл как предел в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ соответствующих собственных интегралов, докажите равенства:

а) $\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos xy dy = \delta(x).$; б) $\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{ixy} dy = \delta(x).$

с) $x \int_0^{+\infty} y J_0(xy) dy = \delta(x)$, где $J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\cos xz}{\sqrt{1-z^2}} dz.$ –

функция Бесселя с нулевым значком.

9. Тракутя несобственный интеграл как предел в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ соответствующих собственных интегралов, докажите равенство

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,y)} dy = \delta(x).$$

где $(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ — скалярное произведение в \mathbb{R}^n .

10. Трактую сумму ряда как предел последовательности его частичных сумм, докажите равенство в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ixk} = \delta(x).$$

11. Считая a вещественным числом, отличным от нуля, докажите следующие равенства в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$\text{а) } \delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}. \quad \text{б) } \delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x-a) + \delta(x+a)}{2|a|}.$$

12. Докажите равенство

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i k x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k).$$

13. Докажите предельное соотношение в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x + 2\pi k).$$

14. Докажите, что для любого натурального m то в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ справедливо равенство $x^m \mathcal{P} \frac{1}{x} = x^{m-1}$.

15. Докажите, что при любом выборе постоянных c_k функция $F(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta(x - \pi k)$ является решением уравнения $(\sin x)F(x) = 0$.

16. Докажите, что для того, чтобы обобщённая функция $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ удовлетворяла соотношению $xF = 0$, необходимо и достаточно, чтобы F была пропорциональна δ -функции, т. е. чтобы нашлась постоянная C такая, что $F = C\delta$.

17. Докажите равенство $\delta'(-x) = \delta'(x)$.

18. Для любой обобщённой функции $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ докажите равенство

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

19. Найдите следующие пределы в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$\text{а) } \frac{\delta(x+h) - \delta(x-h)}{2h}. \quad \text{б) } \frac{\delta(x+2h) - \delta(x-2h) - 2\delta(x)}{4h^2}.$$

20. Докажите, что в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ для любых натуральных k и m справедливы равенства

$$x^k \delta^{(m)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \frac{m!}{(m-k)!}, & \text{если } 0 \leq k \leq m, \\ 0, & \text{если } k > m, \end{cases}$$

В частности проверьте равенство $x\delta'(x) = -\delta(x)$.

21. Докажите, что обобщённые функции $\delta, \delta', \delta'', \dots, \delta^{(k)}$ линейно независимы над полем комплексных чисел.

22. Докажите, что если функция a бесконечно дифференцируема в \mathbb{R} , то для любой обобщённой функции $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ справедлива формула Лейбница для дифференцирования произведения aF :

$$\frac{d^n aF}{dx^n} = \sum_{m=0}^n C_n^m \frac{d^{n-m} a}{dx^{n-m}} \cdot \frac{d^m F}{dx^m},$$

где C_n^m — число сочетаний из n по m . В частности, докажите справедливость формулы $(aF)' = a'F + aF'$.

23. Вычислите $f^{(k)}, k \geq 1$, для следующих функций:

а) $f(x) = H(x)$.

б) $f(x) = \operatorname{sign} \sin x$.

24. Докажите равенства

а) $|\sin x|'' + |\sin x| = 2 \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(x - \pi j).$ б)

$|\cos x|'' + |\cos x| = 2 \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(x - \frac{\pi}{2} - \pi j).$

25. Найдите все производные следующих функций:

а) $f(x) = xH(x)$.

б) $f(x) = x^2 H(1 - x^2)$.

26. Докажите равенства

а) $\frac{d}{dx} \ln |x| = \mathcal{P} \frac{1}{x}$. б) $\frac{d}{dx} \mathcal{P} \frac{1}{x} = -\mathcal{P} \frac{1}{x^2}$, где $\left(\mathcal{P} \frac{1}{x^2}, \varphi \right) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx$.

27. Докажите, что для любого натурального m в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ справедливо равенство

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (2\pi i k)^m e^{2\pi i k x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta^{(m)}(x - k).$$

28. Докажите, что стоящие справа обобщённые функции являются решениями в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ следующих уравнений при произвольном выборе параметров c_1, c_2, c_3 .

а) $x F' = 1, F = c_1 + c_2 H(x) + \ln |x|$,

б) $x^2 F' = \mathcal{P} \frac{1}{x}, F = c_1 + c_2 H(x) + c_3 \delta(x) - \mathcal{P} \frac{1}{x}$.

29. Докажите следующие равенства в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$:

а) $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \ln \sqrt{x^2 + y^2} = 2\pi \delta(x, y)$.

б) $\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \delta(t, x)$, где $F(x, y) = \frac{H(t)}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t}$.

30. Вычислите следующие свёртки в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

- a) $\delta(x-a) * F(x)$, где $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
 б) $\delta^{(m)} * F, *F$, где $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
31. Вычислите следующие свёртки в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$:
 а) $H(x) * (xH(x))$. б) $(H(x)\sin(x)) * (H(x)\sin(x))$.
32. Найдите фундаментальные решения следующих обыкновенных дифференциальных операторов:
 а) $L = \frac{d}{dx} - \lambda$. б) $L = \left(\frac{d}{dx} - \lambda \right)^k$.
33. Докажите следующие равенства в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:
 а) $\mathcal{F}_\pm[\delta(x-x_0)](y) = (2\pi)^{-n/2} e^{\mp i(x_0, y)}$. б) $\mathcal{F}_\pm[D^\alpha \delta(x)](y) = (2\pi)^{-n/2} (\pm iy)^\alpha$.
34. Найдите прямое и обратное преобразования Фурье следующих функций из $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:
 а) $H(x)e^{-ax}$, где $a > 0$. б) $\sin x$.
35. Пусть f и g локально интегрируемы в \mathbb{R} , причём $f(x) = g(x) = 0$ для всех $x < 0$. Докажите, что свёртка $f * g$ определена и задаётся формулой

$$(f * g)(x) = H(x) \int_0^x f(y)g(x-y)dy.$$

2.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации

Вопросы к экзамену

1. Дифференцирование обобщенных функций.
2. Замена переменных в обобщенных функциях.
3. Носитель обобщенных функций.
4. Сингулярный носитель обобщенных функций.
5. Свёртка обобщенных функций. Граничные значения аналитических функций.
6. Пространство умеренных распределений.
7. Фундаментальные решения. Примеры фундаментальных решений.
8. Распространение волн. Построение фундаментальных решений обыкновенных дифференциальных уравнений.
9. Теорема о среднем.
10. Преобразование Фурье быстро-убывающих функций.
11. Свойства преобразования Фурье.
12. Преобразование Фурье финитных функций. Замыкание преобразования Фурье по непрерывности.
13. Методы вычисления преобразования Фурье.
14. Преобразование Фурье финитных обобщенных функций.
15. Умеренные распределения с носителем в конусе.
16. Экспоненциально растущие распределения с носителем в конусе.
17. Свёртка и преобразование Фурье.
18. Проблема деления в классах быстро-растущих распределений.

19. Проблема деления в классах экспоненциально растущих обобщенных функций. Лестница Хермандера.
20. Проблема деления в классах умеренных распределений.
21. Уравнения в конусе. Операционное исчисление.
22. Дифференциально-разностные уравнения на полуоси.
23. Аналитическое продолжение произвольной степени многочлена второго порядка по параметру, являющемуся показателем степени.
24. Инвариантные фундаментальные решения уравнений второго порядка с вещественными коэффициентами.
25. Нахождение регулярной части инвариантного фундаментального решения.
26. Построение формального фундаментального решения.
27. Регуляризация формального фундаментального решения.
28. Общее решение уравнения с постоянными коэффициентами в полупространстве.
29. Классификация уравнений в полупространстве. Примеры уравнений параболического, гиперболического и эллиптического типов.
30. Неоднородные уравнения в полупространстве. Краевые задачи для неоднородных уравнений.